

# MODELISATION DE L'INTERACTION DYNAMIQUE SOL-STRUCTURE A L'AIDE DE LA METHODE DES FRONTIERES ABSORBANTES

N. Boucerredj<sup>1</sup>, M. Meksaoiune<sup>2</sup>

*1 Université de skikda, Département de génie civil. BP: 26, Rue El Hadeik, Skikda, 21000.*

[noura\\_boucerredj@yahoo.fr](mailto:noura_boucerredj@yahoo.fr)

*2 Université badji mokhtar annaba. Département d'Hydraulique. BP: 12, EL Hadjar, Annaba, 23200.*

[meksaouine@yahoo.com](mailto:meksaouine@yahoo.com)

## Résumé

Les problèmes de propagation d'ondes liés à l'interaction dynamique sol-structure ont pour but la détermination des déplacements et des contraintes sous un chargement dynamique; il est raisonnable d'opérer avec un domaine fini, surtout si la méthode des éléments finis est utilisée pour la discrétisation de l'espace en imposant aux frontières du maillage des conditions aux limites bien adaptées en dynamique. Ces dernières doivent limiter le domaine physique à une distance raisonnable et simuler la partie du sol manquante qui tend vers l'infini en transmettant l'énergie véhiculée par l'onde du milieu avant la frontière en dehors de celle-ci, en éliminant les réflexions parasites non fondées physiquement, qui peuvent masquer la solution réelle du problème. Dans cette communication, nous exposons la formulation des frontières absorbantes avec des applications de validation.

**Mots clés :** chargement dynamique, frontières absorbantes, maillage étendu, maillage réduit, matériau fictif.

## 1- INTRODUCTION

Le milieu continu infini est présent dans plusieurs domaines d'engineering, principalement l'interaction dynamique sol-structure ou fluide-structure, la consolidation, l'infiltration et l'écoulement de l'eau dans le sol ainsi que la théorie acoustique de communication.

La solution analytique de ce type de problème est généralement difficile, voire impossible dans la majorité des cas. Seul le recours à l'application des stratégies numériques comme la méthode des éléments finis ou la méthode des éléments aux frontières, aiderait à prédire le comportement réel de ces systèmes structuraux. La méthode des éléments finis idéalise le milieu continu infini en le discrétisant en maillage de dimensions finies, ainsi une frontière artificielle est incorporée en tronquant le domaine physique infini.

Pour cela, des conditions aux limites bien appropriées et très bien adaptées en dynamique doivent être introduites aux frontières du modèle numérique. Ces conditions aux limites doivent limiter le milieu continu infini à une distance raisonnable et représenter le domaine physique manquant qui tend vers l'infini localisé à l'extérieur de la frontière artificielle. Cette dernière doit transmettre l'énergie véhiculée par l'onde du milieu avant la frontière vers l'extérieur. Pour cela ce type de conditions aux limites est dénommé frontières de transmission, ou frontières silencieuses, ou frontières absorbantes, constituent des axes de recherches d'actualité dans plusieurs disciplines : Génie parasismique, Mécanique des fluides, Géophysique, Physique de base et appliquée.

## 2. FORMULATION DES FRONTIÈRES ABSORBANTES

La formulation des frontières absorbantes à été étendue au cas des milieux poreux saturés à comportement non linéaire dans cette communication nous nous limiterons aux cas extrêmes de perméabilités nulle et infinie qui donnent des résultats suffisamment précis dans le cas d'une perméabilité finie.

### a. Cas d'une Perméabilité Infinie ( $k = \infty$ )

Dans ce cas les équations de l'élastodynamique s'écrivent, en absence de forces de masse ( $\mathbf{b}=\mathbf{0}$ )

$$\left[ I^d + G + \frac{r^w}{Q} (M - j)^2 \right] \tilde{N}(\text{div.}\mathbf{u}^s) + G \tilde{N}^2 \mathbf{u}^s + j (M - j) \frac{r^w}{Q} \tilde{N}(\text{div.}\mathbf{u}^w) - (1 - j) r^s \cdot \mathbf{u}_{,tt}^s = \mathbf{0} \quad (1)$$

$$j (M - j) \frac{r^w}{Q} \tilde{N}(\text{div.}\mathbf{u}^s) + j^2 \frac{r^w}{Q} \tilde{N}(\text{div.}\mathbf{u}^w) - j r^w \cdot \mathbf{u}_{,tt}^w = \mathbf{0} \quad (2)$$

En termes des déplacements  $\mathbf{u}^{sp}$ ,  $\mathbf{u}^{ss}$  et  $\mathbf{u}^w$ , les équations d'onde (1) et (2) s'écrivent :

$$\left[ I^d + 2G + (M - j)^2 \frac{r^w}{Q} \right] \tilde{N}^2 \mathbf{u}^{sp} + j (M - j) \frac{r^w}{Q} \tilde{N}^2 \mathbf{u}^w - (1 - j) r^s \mathbf{u}_{,tt}^{sp} = \mathbf{0} \quad (3)$$

$$G \tilde{N}^2 \mathbf{u}^{ss} - (1 - j) r^s \mathbf{u}_{,tt}^{ss} = \mathbf{0} \quad (4)$$

$$j (M - j) \frac{r^w}{Q} \tilde{N}^2 \mathbf{u}^{sp} + j^2 \frac{r^w}{Q} \tilde{N}^2 \mathbf{u}^w - j r^w \mathbf{u}_{,tt}^w = \mathbf{0} \quad (5)$$

$\mathbf{u}^{sp}$  et  $\mathbf{u}^{ss}$  Sont, respectivement, les parties irrotationnelle et solénoïdale (ou équivalentique) de  $\mathbf{u}^s$ . Les équations d'ondes (3) et (5) montrent que seuls  $\mathbf{u}^{sp}$  et  $\mathbf{u}^w$  sont couplés et mettent en évidence l'existence d'ondes longitudinales diffusives [3] et [4]. L'équation (4) définit une onde transversale qui ne sollicite que le squelette (ce qui est en accord avec l'hypothèse que le fluide ne transmet pas de cisaillement) [2].

Posons;

$$c_s^2 = \frac{G}{(1 - \Phi)\rho^s} \quad (6)$$

L'équation (3) s'écrit :

$$\tilde{N}^2 \mathbf{u}^{ss} - \frac{1}{c_s^2} \mathbf{u}_{,tt}^{ss} = \mathbf{0} \quad (7)$$

qui est l'équation d'une onde transversale qui se propage dans la phase solide avec la vitesse  $c_s$  donnée par (6).

En utilisant à nouveau des équations du premier ordre, nous aurons:

$$b \mathbf{u}_{,t}^{ss} + \mathbf{u}_{,x}^{ss} = \mathbf{0} \quad (8)$$

$$A \mathbf{u}_{,t}^p + \mathbf{u}_{,x}^p = \mathbf{0} \quad (9)$$

x étant l'abscisse suivant la normale à l'onde.

avec;

$$\mathbf{u}^p = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^{sp} \\ \mathbf{u}^w \end{Bmatrix} \quad (10)$$

Les composantes de la matrice A sont données par :

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{c_{p1} \beta_1 - c_{p2} \beta_2}{c_{p1} c_{p2} (\beta_1 - \beta_2)}; & a_{12} &= \frac{c_{p1} - c_{p2}}{c_{p1} c_{p2} (\beta_2 - \beta_1)} \\ a_{21} &= \frac{\beta_1 \beta_2 (c_{p2} - c_{p1})}{c_{p1} c_{p2} (\beta_2 - \beta_1)}; & a_{22} &= \frac{c_{p2} \beta_1 - c_{p1} \beta_2}{c_{p1} c_{p2} (\beta_1 - \beta_2)} \end{aligned} \quad (11)$$

La loi de comportement du milieu s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma'_{II} - (M - \varphi)P \\ \sigma'_{III} - (M - \varphi)P \\ \sigma'_{I,II} \\ -\varphi P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda^d + 2G) + \frac{\rho^w}{Q}(M - \varphi)' & 0 & \varphi(M - \varphi) \frac{\rho^w}{Q} \\ \lambda^d + \frac{\rho^w}{Q}(M - \varphi)' & 0 & \varphi(M - \varphi) \frac{\rho^w}{Q} \\ 0 & G & 0 \\ \varphi(M - \varphi) \frac{\rho^w}{Q} & 0 & \varphi \frac{\rho^w}{Q} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{I,I}^s \\ u_{II,I}^s \\ u_{I,I}^w \end{Bmatrix} \quad (12)$$

Considérons à nouveau les équations paraxiales qui s'écrivent:

$$A \mathbf{u}_{,t} + \mathbf{u}_{,x} = \mathbf{0} \quad (13)$$

où,

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u^s \\ u^w \end{Bmatrix}$$

En développant (13) nous trouvons les équations suivantes:

$$\begin{Bmatrix} u_{I,I}^s \\ u_{I,I}^w \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{I,t}^s \\ u_{I,t}^w \end{Bmatrix} \quad (14)$$

A partir de l'équation paraxiale correspondante à l'onde de cisaillement qui s'écrit :

$$b u_{II,t}^s + u_{II,t}^s = 0 \quad (15)$$

on a :

$$u_{II,t}^s = -bu_{II,t}^s \quad (16)$$

portant les expressions (14) et (16) dans (12), on aura:

$$\{S\} = - \begin{bmatrix} I^d + 2G + \frac{r^w}{Q}(M-j)^2 & 0 & j(M-j)\frac{r^w}{Q} \\ I^d + \frac{r^w}{Q}(M-j)^2 & 0 & j(M-j)\frac{r^w}{Q} \\ 0 & G & 0 \\ j(M-j)\frac{r^w}{Q} & 0 & j^2\frac{r^w}{Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & a_{12} \\ 0 & b & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{I,t}^s \\ u_{II,t}^s \\ u_{I,t}^w \end{Bmatrix} \quad (17)$$

$$\Rightarrow \{S\} = -\mathbf{DA}u_{,t} \quad (18)$$

On est arrivée à d'écrire la formulation des frontières absorbantes sous la forme d'une loi de comportement à laquelle obéit le milieu (matériau fictif) en région paraxiale. Cette forme de la formulation paraxiale possède l'avantage de permettre une implantation facile dans un code de calcul existant.

*b. Cas d'une Perméabilité Nulle ( $k=0$ )*

Ce cas est caractérisé par un fort couplage visqueux qui correspond à la propagation d'excitations de basses fréquences.

Ce qui permet d'écrire l'équation correspondante au passage de l'onde P sous la forme suivante:

$$\mathbf{K}u_{,xx} - \mathbf{M}u_{,tt} = \mathbf{0} \quad (19)$$

où  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{M}$  sont définis par :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} I^d + 2G + \frac{r^w}{Q} M^2 & 0 \\ 0 & I^d + 2G + \frac{r^w}{Q} M^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} (1-j)r^s + jr^w & 0 \\ 0 & (1-j)r^s + jr^w \end{bmatrix}$$

et la vitesse d'onde  $c_p$  est définie par

$$c_p = \sqrt{(I^d + 2G + \frac{r^w}{Q} M^2) / \Gamma} \quad (20)$$

La loi de comportement à présent est la suivante:

$$\begin{Bmatrix} S_{I1} \\ S_{II1} \\ S_{III} \\ -jP \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} I^d + 2G + \frac{r^w}{Q} M^2 & 0 \\ I^d + G + \frac{r^w}{Q} M^2 & 0 \\ 0 & G \\ \frac{r^w}{Q} Mj & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{I,t}^s \\ u_{II,t}^s \end{Bmatrix} \quad (21)$$

soit;

$$\{S\} = -DAu_t \quad (22)$$

Où le produit  $D.A$  donne une matrice qui exprime la loi de comportement qui peut être linéaire ou non à laquelle obéit le milieu (matériau fictif) en région paraxiale, obtenu à l'aide d'un système d'équations différentielles du premier ordre pour la formulation d'une frontière paraxiale qui sera introduit comme un nouveau modèle.

### 3. FORMULATION SEMI DISCRETE DES EQUATIONS DE MOUVEMENT

La discrétisation par élément finis [1] des équations de mouvement conduit au système algébrique suivant :

$$\begin{bmatrix} M^s & 0 \\ 0 & M^w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^s \\ a^w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^s \\ F^w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Z & -Z \\ -Z^T & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^s \\ v^w \end{bmatrix} \quad (23)$$

Où  $M^s$  et  $M^w$  sont Les matrices masse du squelette solide et du fluide respectivement qui s'écrit,

$$(m_{abij}^{ab})^e = m_{pq}^e = \begin{cases} d_{ij} \int_{\Omega^e} N_a \tilde{r}^a N_b d\Omega & \text{si } a = b \\ 0 & \text{si } a \neq b \end{cases} \quad (24)$$

La discrétisation du terme d'interaction entre les deux phases  $Z$  donne lieu à la matrice de conductivité, qui s'écrit:

$$Z_{ij}^{AB} = \int_{\Omega} N^A Z_{ij} N^B d\Omega \quad (25)$$

$$\text{Où} \quad (N_i^A)^s = \int_{\Omega} N_j^A (s_{ij}^s - n^s p_w d_{ij}) d\Omega$$

$$(N_i^A)^w = \int_{\Omega} r^w N^A (v_j^w - v_j^s) v_{i,j}^w d\Omega - \int_{\Omega} N_{,i}^A h^w p_w d\Omega$$

$a^s, a^w, v^s$  et  $v^w$  sont les vecteurs accélérations et vitesses squelette solide et du fluide respectivement.  $F^s$  et  $F^w$  sont les vecteurs forces qui s'écrivent :

$$F^s = (F^{ext})^s - N^s \quad (26)$$

$$F^w = (F^{ext})^w - N^w$$

Où  $(F^{ext})$  est le vecteur des forces extérieur,  $N^s$  et  $N^w$  les résultantes des effets interne.

#### 4. APPLICATION DE VALIDATION

##### Exemple 1

Pour illustrer la procédure, on considère un profil de sol à base rigide soumis à un mouvement incident causé par une charge horizontale appliquée à un seul pas de temps aux deux premiers noeuds, la géométrie de cet application se compose de 20 éléments quadrilatère pour le maillage réduit et 12000 pour le maillage étendu. Les caractéristiques mécaniques du domaine étudié sont les suivantes:

Solide :  $\lambda$  (N/m<sup>2</sup>)= 0,353E+09,  $G$ (N/m<sup>2</sup>)= 0, 33E+09,  $\rho^s$  (N/m<sup>3</sup>) =2,3E+ 03

Fluide :  $M = 0,75$ ,  $Q=0,1625E-04$ ,  $\rho^w$  (kg/m<sup>3</sup>)= 1,0x10<sup>3</sup>

$\Delta t = 7,343E-07$ sec.

Les histoires au point A et B sont présentées ci-dessous :

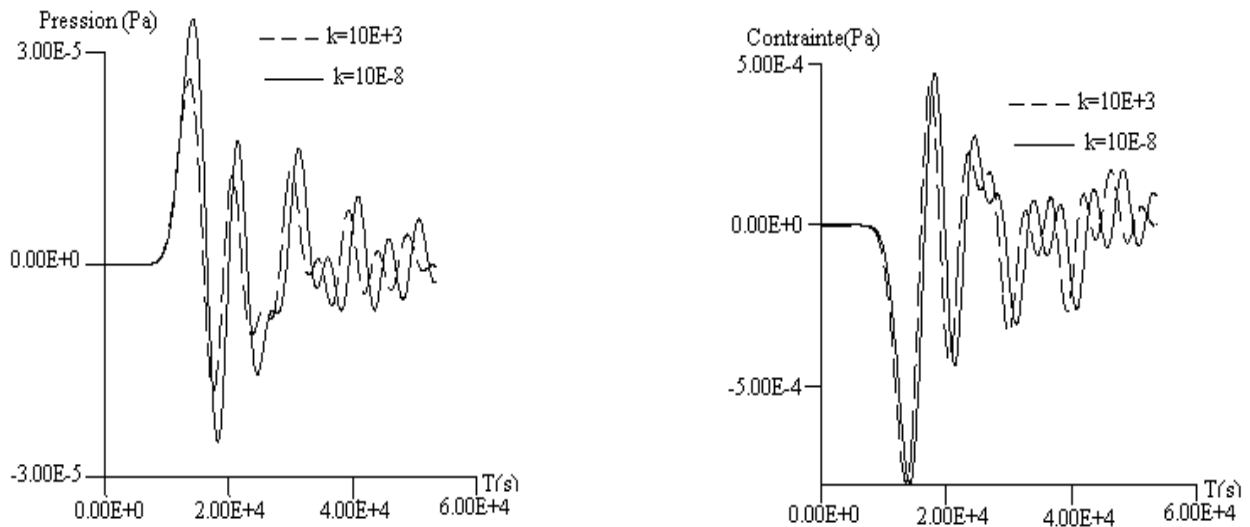


Figure 1 : Pression et Contrainte au point A dans le cas de la Frontière Paraxiale

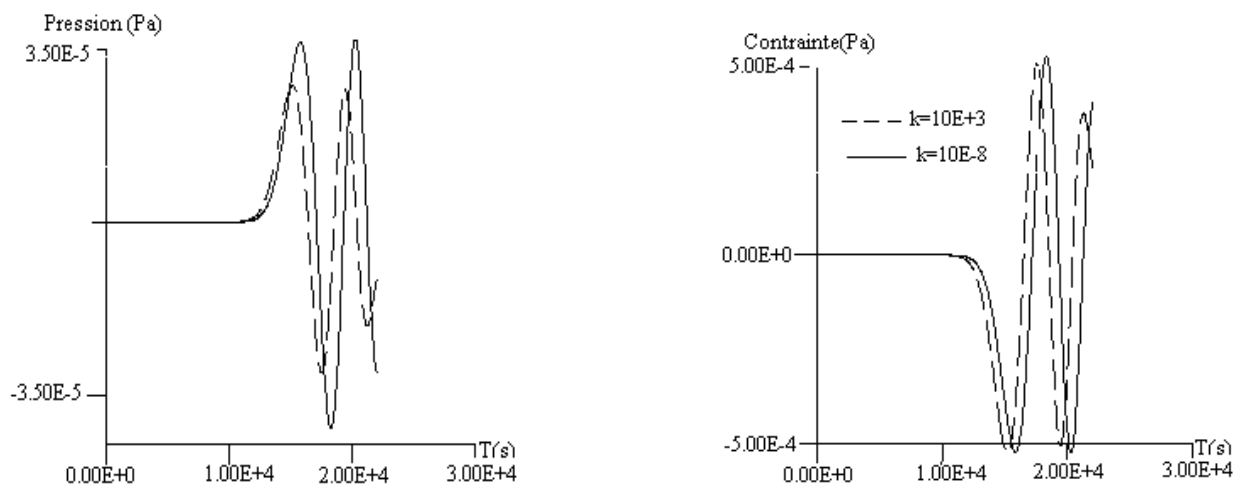
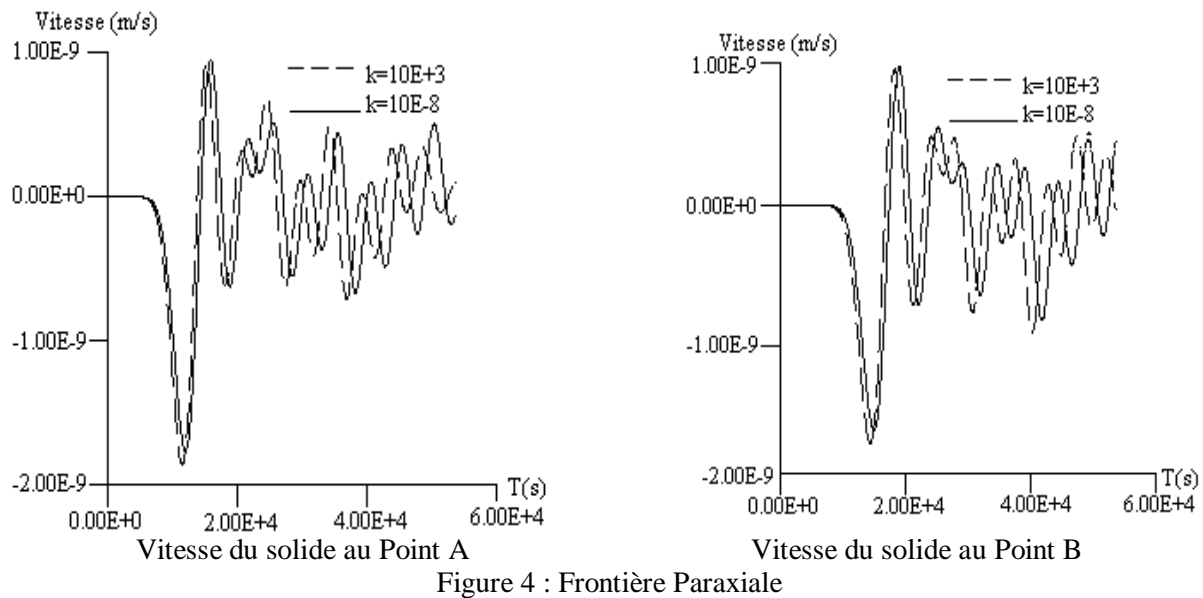
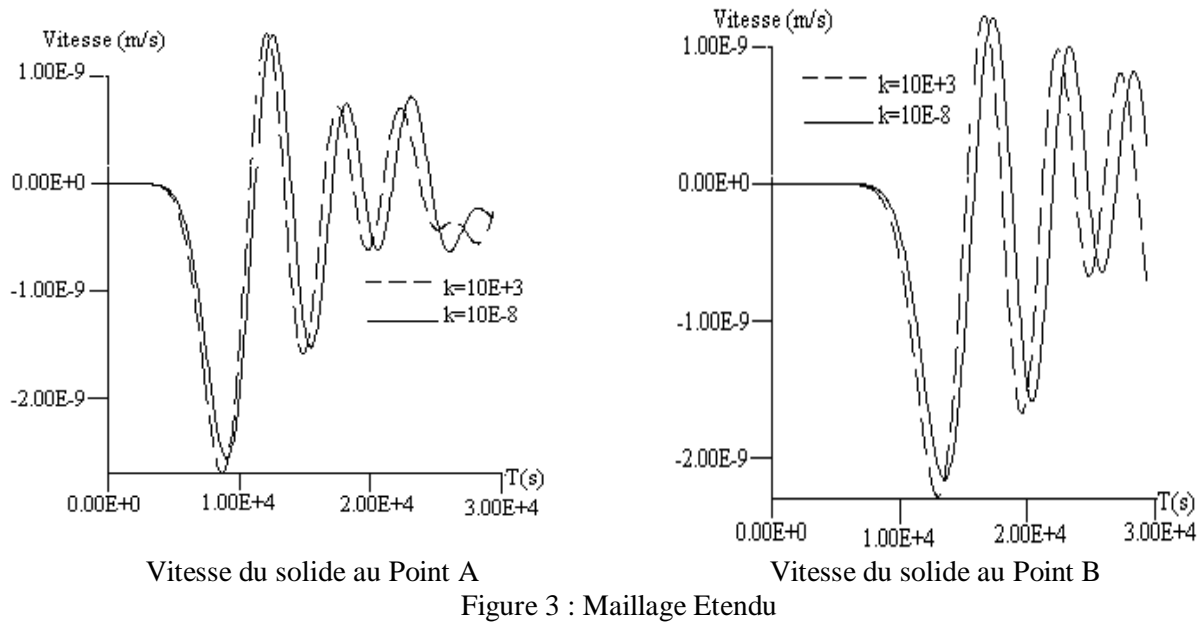


Figure 2 : Pression et Contrainte au point A dans le cas du Maillage Etendu

En examinant les courbes d'histoire ci-dessus, nous remarquons l'existence de certaines oscillations qui s'amortissent avec le temps. Ces oscillations sont dues aux hautes fréquences de la charge appliquée ainsi qu'au passage brusque du domaine intérieur au domaine paraxial.



Ces derniers résultats montrent en particulier l'effet très faible de la perméabilité sur les résultats prédit à l'aide d'une formulation supposant une perméabilité infinie.

### Exemple 2

Considérons le cas du problème de déformation plane. La charge est une charge impulsive. Les données mécaniques sont les suivants :

$$I = 6.92E+08 \text{ Pa}, \quad G = 4.61E+08 \text{ Pa}, \quad M = 7.5E-01, \quad Q = 1.625E-05, \quad K = \infty$$

$$r^w = 1.0 E + 03 \text{ Kg / m}^3, \quad r^s = 2.3 E + 03 \text{ Kg / m}^3, \quad \Delta t = 7.343 E - 07 \text{ sec}$$

Nous comparerons les réponses obtenues aux points A à l'aide de la frontière paraxiale (le nombre d'éléments quadrilatère est de 22 éléments) avec ceux donnés par le maillage étendu (le nombre d'éléments quadrilatère est de 154 éléments). L'histoire au point A (point proche au point d'application de charge), est représentée sur les figures suivantes:

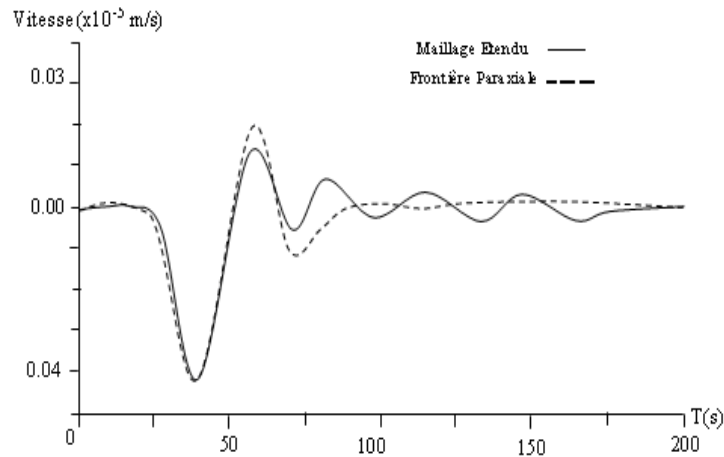


Figure 5 : Vitesse horizontale au point A

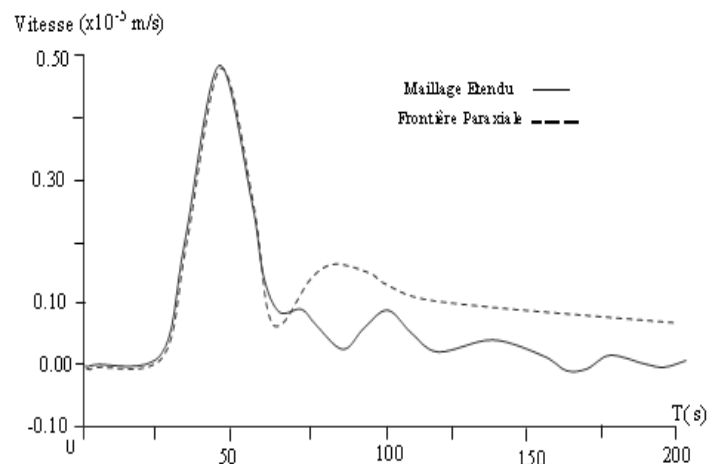


Figure 6 : Vitesse verticale du solide au point A

En examinant les figures 5 et 6, l'accord est très acceptable entre les résultats obtenus avec Frontière Paraxiale, et la solution de référence considérée pour le maillage étendu.

## 5. CONCLUSION

Le modèle de frontières absorbantes développé correspond à un système d'équations paraxiales du premier ordre qui représente fiablement dans la plupart des cas le comportement dynamique du système, en le comparant à la solution de référence considérée pour un modèle très large avec des conditions de déplacements fixes, où la réflexion parasite de cette frontière n'a pas le temps durant le test de masquer la solution réelle du domaine d'analyse. Le modèle développé a été utilisé dans l'implémentation de l'action sismique en utilisant la méthode de la force sismique effective.

Le développement des formulations d'ordre élevée pour les frontières absorbantes et l'introduire d'un élément d'interface entre la région intérieure et la région de frontière afin de conserver plus de régularité dans la réponse calculée et diminuer les oscillations dues au passage brusque d'une région à l'autre représente une voie d'extension intéressante pour le présent travail.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] Klans-Jürgen Bathe, Finite Element procedures In Engineering Analysis. Prentice-Hall, Inc, 1982.
- [2] Biot. M.A., General theory of three dimensionnal consolidation. Journal of applied physics, 12, pp 155-164. (1941)
- [3] Z. Zerfa, Loret. Benjamin, Coupled dynamic analysis of earth structures, 5th European conference on soil dynamics and earthquake engineering, Vol. 23, PP. 435-454, (2002).
- [4] Z. Zerfa, Loret. Benjamin, A viscous boundary for the dynamic analysis of porous media, Earthquake engineering and structural dynamics, Vol. 33, PP. 89-110, (2004).