

CONCEPTION DES PLAQUES FGM AYANT UN COMPORTEMENT SIMILAIRE AUX PLAQUES HOMOGENES SOUS CHARGE THERMIQUE

A. FEKRAR¹, H.AIT ATMANE^{1,2}, A. TOUNSI¹, EA ADDA BEDIA¹

¹: Laboratoire des matériaux & Hydrologie, Université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès, afekrar@yahoo.com

²: Département de génie civil, Université Hassiba Benbouali de Chlef.

Résumé

Cet article considère le flambement avec la prise en compte de l'effet thermique sur les plaques fonctionnellement évalués (FGM) dans lesquels les propriétés matérielles varient suivant l'épaisseur. Des résultats sont obtenus pour le flambement thermique. Par conséquent, on peut prévoir le comportement des plaques FGM sachant que le comportement est semblable aux plaques homogènes. Des résultats étendus disponibles dans la littérature peuvent être employés aussi bien que des solutions et des logiciels développés pour les matériaux isotropes, de ce fait on réduit considérablement le besoin d'analyse directe de tels problèmes des plaques FGM.

Mots clés : FGM (Functionally Graded Materials)- Flambement thermique -Charge thermique

Introduction générale :

Le développement des matériaux composites a permis d'associer des propriétés spécifiques à différents matériaux au sein d'une même pièce. L'optimisation locale de ces propriétés, par association d'un matériau de haute dureté à la surface d'un matériau tenace par exemple, pose alors le problème de l'interface.

Cette transition brutale de compositions peut générer localement de fortes concentrations de contraintes. La solution d'une transition continue des propriétés recherchées, par un gradient de composition, permet d'atténuer cette singularité par l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés (en anglais : Functionally Graded Material " F.G. M ").

Les matériaux à gradient de propriétés (FGM) ; un type de matériaux composites produit en changeant sans interruption les fractions de volume dans la direction d'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminé, ces type de matériaux, ont suscité beaucoup d'attention récemment en raison des avantages de diminuer la disparité dans les propriétés matérielles et de réduire les contraintes thermiques .

Le concept de " Matériaux à Gradient de Propriétés " a été développé dans le laboratoire national d'aérospatial du Japon en 1984 par M. Niino et ses collègues à Sendai. L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion [9].

Les FGM peuvent être utilisés pour différentes applications, telles que les enduits des barrières thermiques pour les moteurs en céramique, turbines à gaz, couches minces optiques, etc. [2].

Généralement, les FGM sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux [4].

Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement hétérogènes. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue les FGM des matériaux composites conventionnels [9]. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés des FGM dans certains cas.

En 1987, le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé " la recherche sur la technologie de base pour développement de matériaux à Gradient de propriétés et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques ". L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux. Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux sont appelés à travailler à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'à un gradient de température de l'ordre de 1300°C. A cette année-là, aucun matériau industriel n'était connu pour supporter de telles sollicitations thermomécaniques [9].

Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux :

- ✓ Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau ;
- ✓ Ténacité du matériau coté basse température ;
- ✓ Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau [7].

Pour répondre à un tel cahier des charges, L'idée originale des FGM a été proposée pour élaborer un nouveau composite profitant à la fois des propriétés des céramiques (Coté haute températures) et des métaux (Coté basse température).

A la fin de la première étape (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000 K (Température de surface) et à un gradient de température de 1000 K. Quatre techniques ont été utilisées pour fabriquer les matériaux présentant un gradient de composition et de structure ; les techniques utilisées dans la fabrication de tels matériaux sont les suivantes : le système SIC/C par C.V.D, le système PSZ/Mo par la technique de la compaction sèche des poudres, le système

TiB₂/Cu par synthèse par auto-propagation à haute température, et enfin le système (Ni-Cr-Al-Y)/(ZrO₂-Y₂O₃) par projection plasma à double torches [8].

Dans la seconde étape (1990-1999), le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape. Pendant les années 90, non seulement les champs d'application des FGM s'est développé pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température, mais s'est aussi élargi à d'autres applications : biomécaniques, technologie de capteur, optique, etc... .

On trouve une littérature très importante sur l'utilisation de ce matériau. Cependant, l'utilisation des structures en FGM dans les environnements avec de grands changements de température exige la connaissance des déformations.

Le but de ce travail consiste à la mise au point d'une approche unifiée qui propose une solution aux problèmes de la non homogénéité des plaques en FGM (céramique/métal) après cela on a étudié la proportionnalité entre la variation de la température critique de flambement de la plaque homogène et celle des P-FGM.

Le présent travail se termine par une conclusion générale où on souligne l'efficacité de cette proportionnalité dans les calculs des matériaux FGM en utilisant les résultats des plaques homogènes.

Conceptions Des Plaques FGM

Dans la plupart des cas, les investigateurs considèrent le FGM comme étant un matériau composé particulier pour lesquels la fraction de volume varie sans interruption par l'épaisseur, Quelques études considèrent également le FGM comme étant un composé renforcé par un tissu dans lesquels l'orientation de fibre varie à travers l'épaisseur.

Un matériau FGM est un type de matériaux composites classé par leur microstructure variable dans l'espace; conçue pour optimiser l'exécution des éléments de structures par la distribution de propriétés correspondantes. Les distributions de propriété sont trouvées dans une variété de produits communs qui doivent avoir des fonctions multiples (c'est-à-dire multifonctionnelles) comme les liaisons entre les particules ; qui doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture ; mais doivent également être assez dures sur l'extérieur pour empêcher l'usure.

On utilise souvent la théorie des stratifiés pour les applications des plaques FGM. De même la prise en compte de l'effet de cisaillement exige une bonne description des champs de contrainte et de déformation. Là encore une approche 3D peut fournir des informations dans certains cas (bord libre droit, plaque simplement appuyée . . .) mais il est préférable d'envisager des démarches bidimensionnelles (2D) de type plaque. Dans la suite ce sont ces approches 2D qui seront mentionnées.

Les modèles classiques Love-Kirchhoff

Les modèles sont basés sur une distribution linéaire des déplacements dans l'épaisseur [5], [6]. L'hypothèse adoptée est celle de Love-Kirchhoff [12] de contraintes planes, les déformations dues aux cisaillements transverses sont négligées. La normale reste droite et est perpendiculaire à la surface moyenne après avoir déformée.

Les modèles Reissner-Mindlin

Pour introduire l'effet du cisaillement transverse, l'hypothèse cinématique Mindlin est adoptée: La normale reste droite mais non perpendiculaire à la surface moyenne (à cause de l'effet du cisaillement transverse).

Avec ce choix de la forme des champs de déplacements, les déformations transversales sont constantes en z. Les contraintes de cisaillement sont donc uniformes dans chaque couche et discontinues entre les couches. Cette mauvaise description oblige à introduire des coefficients correcteurs pour mieux prendre en compte, dans l'écriture de l'énergie, les effets de cisaillement transversal [Whitney]. Les résultats obtenus dépendent essentiellement du choix empirique dans des

situations complexes des coefficients correcteurs et l'étude des composites épais restes aléatoires par ce type d'approche cinématique. Ce modèle est aussi la Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (First order shear deformation theory FSDT).

Propriétés matérielles de la plaque P-FGM :

La fraction volumique dans les P-FGM est assurée par une loi de puissance sous la forme :

$$V(z) = \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^k \quad (1)$$

k : paramètre de matériau

h : l'épaisseur de la plaque

z : la coordonnée suivant l'épaisseur

les propriétés matérielles de la plaque P-FGM sont définies comme suit :

$$E(z) = V(z)E_1 + [1 - V(z)]E_2 \quad (2)$$

$$a(z) = V(z)a_1 + [1 - V(z)]a_2 \quad (3)$$

$$n(z) = n_0 \quad (4)$$

E_1, E_2 sont les modules de Young des matériaux constituant la plaque P-FGM pour $z = h/2$, $z = -h/2$, respectivement.

a_1, a_2 sont coefficients d'expansions thermiques des matériaux constituant la plaque P-FGM pour $z = h/2$, $z = -h/2$, respectivement.

Bao et Wang [1] ont indiqué que l'influence du coefficient de poisson sur la déformation des plaques est beaucoup moins importante que l'influence du module de Young.

Equations de stabilité des plaques FGM

Afin de mettre en évidence le comportement des différents modèles dans l'introduction, supposant une plaque de forme rectangulaire anisotrope, en élasticité linéaire. L'épaisseur h de la plaque est uniforme est définie avec le système de coordonnées $R = (o, x, y, z)$, z est la normale au plan moyen de la plaque.

La plaque rectangulaire en P-FGM est composée de deux matériaux (métal et céramique) les axes sont orientés comme montre la Figure 1

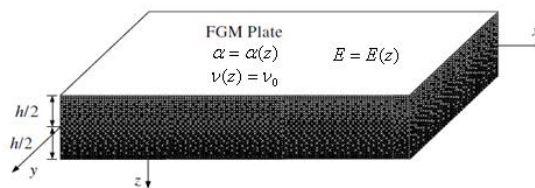


Figure 1 : système d'axe d'une plaque en FGM

Le schéma de déplacement utilisé est de la forme suivante on tenant compte de l'effet de cisaillement :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y, 0) + \phi_x(x, y) \\ v(x, y, z) = v_0(x, y, 0) + \phi_y(x, y) \\ w(x, y, z) = w_0(x, y, 0) \end{cases} \quad (5)$$

(u_0, v_0, w_0) sont les déplacements du plan moyen

Le champ des déformations se déduit de la relation (5) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial z} \\ \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + z \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \\ \gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \\ \gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \end{array} \right. \quad (6)$$

Suivant la loi Hooke on tenant compte de l'effet de la température équation :

$$\begin{aligned} s_x &= \frac{E}{1-n^2} [e_x + ne_y - (1+n)\alpha T] \\ s_y &= \frac{E}{1-n^2} [e_y + ne_x - (1+n)\alpha T] \\ t_{xy} &= \frac{E}{2(1+n)} g_{xy} \\ t_{xz} &= \frac{E}{2(1+n)} g_{xz} \\ t_{yz} &= \frac{E}{2(1+n)} g_{yz} \end{aligned} \quad (7)$$

Les forces par unité de longueur et les moments sont données par les équations:

$$N_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} s_{ij} dz, M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} s_{ij} z dz, Q_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} t_{ij} dz \quad (8)$$

On substituant les équations (7) dans l'équation (8) on trouve :

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{E_1}{1-\nu^2} (u_{,x} + \nu v_{,y}) + \frac{E_2}{1-\nu^2} (\phi_{x,x} + \nu \phi_{y,y}) - \frac{\Phi}{1-\nu} \\ N_y &= \frac{E_1}{1-\nu^2} (\nu u_{,x} + v_{,y}) + \frac{E_2}{1-\nu^2} (\nu \phi_{x,x} + \phi_{y,y}) - \frac{\Phi}{1-\nu} \\ N_{xy} &= \frac{E_1}{2(1+\nu)} (u_{,y} + v_{,x}) + \frac{E_2}{2(1+\nu)} (\phi_{x,y} + \phi_{y,x}) \\ M_x &= \frac{E_2}{1-\nu^2} (u_{,x} + \nu v_{,y}) + \frac{E_3}{1-\nu^2} (\phi_{x,x} + \nu \phi_{y,y}) - \frac{\Theta}{1-\nu} \\ M_y &= \frac{E_2}{1-\nu^2} (\nu u_{,x} + v_{,y}) + \frac{E_3}{1-\nu^2} (\nu \phi_{x,x} + \phi_{y,y}) - \frac{\Theta}{1-\nu} \\ M_{xy} &= \frac{E_2}{2(1+\nu)} (u_{,y} + v_{,x}) + \frac{E_3}{2(1+\nu)} (\phi_{x,y} + \phi_{y,x}) \\ Q_x &= \frac{E_1}{2(1+\nu)} (\phi_x + w_{,x}) \\ Q_y &= \frac{E_1}{2(1+\nu)} (\phi_y + w_{,y}) \end{aligned} \quad (9)$$

Avec :

$$E_1 = E_m h + \frac{E_{cm} h}{k+1} \quad (10)$$

$$E_2 = \frac{k E_{cm} h^2}{2(k+1)(k+2)} \quad (11)$$

$$E_3 = \frac{1}{12} E_m h^3 + \left[\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+2} + \frac{1}{4(k+3)} \right] E_{cm} h^3 \quad (12)$$

$$\Phi = \int_{-h/2}^{h/2} \left[E_m + E_{cm} \left(\frac{1+z}{2h} \right)^k \right] \left[\alpha_m + \alpha_{cm} \left(\frac{1+z}{2h} \right)^k \right] T(x,y,z) dz \quad (13)$$

$$\Theta = \int_{-h/2}^{h/2} \left[E_m + E_{cm} \left(\frac{1+z}{2h} \right)^k \right] \left[\alpha_m + \alpha_{cm} \left(\frac{1+z}{2h} \right)^k \right] T(x,y,z) z dz \quad (14)$$

Equations des plaques tenant compte du flambement :

Pour prendre en compte le phénomène de flambement, il est donc nécessaire d'écrire les équations des plaques en tenant compte de la déformation latérale, ces équations sont données par la théorie de Karman :

$$\begin{aligned} N_{x,x} + N_{xy,x} &= 0 \\ N_{y,y} + N_{xy,x} &= 0 \\ M_{x,x} + M_{xy,y} - Q_x &= 0 \\ M_{xy,x} + M_{y,y} - Q_y &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

$$Q_x + Q_y + q + N_x w_{,xx} + 2N_{xy} w_{,xy} + N_y w_{,yy} = 0$$

On induit les équations (9) dans les équations (15) on arrive a :

$$\begin{aligned} &\frac{E_1}{1-\nu^2}(u_{,xx} + \nu v_{,yy}) + \frac{E_1}{2(1+\nu)}(u_{,yy} + v_{,xx}) \\ &+ \frac{E_2}{1-\nu^2}(\phi_{x,xx} + \nu \phi_{y,yy}) + \frac{E_2}{2(1+\nu)}(\phi_{x,yy} + \phi_{y,xx}) = 0 \\ &\frac{E_1}{1-\nu^2}(\nu u_{,xy} + v_{,yy}) + \frac{E_1}{2(1+\nu)}(u_{,xy} + v_{,xx}) \\ &+ \frac{E_2}{1-\nu^2}(\nu \phi_{x,xy} + \phi_{y,yy}) + \frac{E_2}{2(1+\nu)}(\phi_{x,xy} + \phi_{y,xx}) = 0 \\ &\frac{E_2}{1-\nu^2}(u_{,xx} + \nu v_{,yy}) + \frac{E_2}{2(1+\nu)}(u_{,yy} + v_{,xx}) \\ &+ \frac{E_3}{1-\nu^2}(\phi_{x,xx} + \nu \phi_{y,yy}) + \frac{E_3}{2(1+\nu)}(\phi_{x,yy} + \nu \phi_{y,xx}) - \frac{E_1}{2(1+\nu)}(\phi_x + w_{,x}) = 0 \\ &\frac{E_2}{1-\nu^2}(\nu u_{,xy} + v_{,yy}) + \frac{E_2}{2(1+\nu)}(u_{,xy} + v_{,xx}) \\ &+ \frac{E_3}{1-\nu^2}(\nu \phi_{x,xy} + \phi_{y,yy}) + \frac{E_3}{2(1+\nu)}(\phi_{x,xy} + \nu \phi_{y,xx}) - \frac{E_1}{2(1+\nu)}(\phi_y + w_{,y}) = 0 \\ &\frac{E_1}{2(1+\nu)}(\phi_{x,x} + w_{,xx}) + \frac{E_1}{2(1+\nu)}(\phi_{y,y} + w_{,yy}) \\ &+ N_x w_{,xx} + 2N_{xy} w_{,xy} + N_y w_{,yy} + q = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Si on procède à quelque transformation sur l'équation (16) on trouve :

$$\begin{aligned} \nabla^4 w + \frac{2(1+\nu)}{E_1} \nabla^2 (N_x w_{,xx} + 2N_{xy} w_{,xy} + N_y w_{,yy} + q) \\ - \frac{E_1(1-\nu^2)}{E_1 E_3 - E_2^2} (N_x w_{,xx} + 2N_{xy} w_{,xy} + N_y w_{,yy} + q) = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

L'équation (17) permet de déterminer la configuration initial a (configuration élastique) dans le cas de grandes déformations latérales ($w_0 + w_1$). Cette équation n'est toutefois pas linéaire, et la simplification usuelle consiste à déterminer la configuration initiale à l'aide de la théorie linéaire, il en résulte que les termes, w_0 présent la courbure initiale, qui peuvent être négligés dans l'équation (17). Cette équation devient alors :

$$\begin{aligned} \nabla^4 w_1 + \frac{2(1+\nu)}{E_1} \nabla^2 (N_x^0 w_{1,xx} + 2N_{xy}^0 w_{1,xy} + N_y^0 w_{1,yy} + q) \\ - \frac{E_1(1-\nu^2)}{E_1 E_3 - E_2^2} (N_x^0 w_{1,xx} + 2N_{xy}^0 w_{1,xy} + N_y^0 w_{1,yy} + q) = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

Avec N_x^0 , N_{xy}^0 et N_y^0 les efforts pour les quel la plaque et dans l'état de l'avant flambement.

Dans le cas ou on néglige l'effet de la contrainte de cisaillement et en tenant compte de l'équation (18) on trouve :

$$\nabla^4 w_1 + \frac{E_1(1-\nu^2)}{E_1 E_3 - E_2^2} \frac{\Phi}{1-\nu} \nabla^2 w_1 = 0 \quad (19)$$

Analyse du flambement :

L'équation constitue (18) l'équation de flambement est utilisée sous cette forme pour déterminer la charge critique de flambement, le problème devient alors non linéaire dans le cas des matériaux FGM .Pour résoudre le problème de flambement, on est amené à utiliser une méthode de perturbation qui permet d'aboutir à des équations linéaires.

Pour déterminer la température critique de flambement, la solution en membrane nous donne le cas du d'avant flambement en compression les équations (18) nous donne :

$$N_x^0 = -\frac{\Phi}{1-\nu} \quad N_{xy}^0 = 0 \quad N_y^0 = -\frac{\Phi}{1-\nu} \quad (20)$$

On remplace l'équation (20) dans l'équation (18), aucune charge latérale n'étant considérée $q = 0$:

$$\nabla^4 w_1 - \frac{2(1+\nu)}{E_1} \frac{\Phi}{1-\nu} \nabla^4 w_1 + \frac{E_1(1-\nu^2)}{E_1 E_3 - E_2^2} \frac{\Phi}{1-\nu} \nabla^2 w_1 = 0 \quad (21)$$

Dans le cas ou on néglige cisaillement, ces de la référence [3] :

$$\nabla^4 w_1 + \frac{E_1(1-\nu^2)}{E_1 E_3 - E_2^2} \frac{\Phi}{1-\nu} \nabla^2 w_1 = 0$$

Flambement des plaques FGM simplement appuyés :

Dans le cas où la plaque est en appuis simple sur les quatre cotés les conditions aux limites seraient :

$$w_1 = 0, \quad M_{1x} = 0, \quad \phi_{y1} = 0, \quad \text{pour } x = 0, a$$

$$w_1 = 0, \quad M_{y1} = 0, \quad \phi_{x1} = 0, \quad \text{pour } y = 0, a$$

Pour que ces conditions aux frontières soient satisfaites on va adopter la solution du déplacement w_1 :

$$w_1 = C \sin(m\pi x / a) \sin(n\pi y / b) \quad (22)$$

m, n sont les modes suivant les deux directions x, y respectivement.

C un coefficient peut être déterminé à partir les conditions aux limites.

En reportant expression (22) dans l'équation (20), nous obtenons :

$$\Phi = \frac{E_1 (E_1 E_3 - E_2^2) (1-\nu) \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]}{2(1+\nu) (E_1 E_3 - E_2^2) \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] + E_1^2 (1-\nu^2)} \quad (23)$$

Résultats et discussions

Considérant qu'une plaque P-FGM est soumise à une température constante .développons maintenant la formule (22) en tenant compte de (13) :

$$\Phi = \Delta T \int_{-h/2}^{h/2} \left[E_m + E_{cm} \left(\frac{1+z}{h} \right)^k \right] \left[\alpha_m + \alpha_{cm} \left(\frac{1+z}{h} \right)^k \right] dz \quad (24)$$

En reportant cette expression dans l'équation (13), nous obtenons l'équation :

$$\Delta T = \frac{(E_1 E_3 - E_2^2) (1-\nu) \pi^2 (m^2 + n^2 B_a^2)}{2(1+\nu) (E_1 E_3 - E_2^2) \pi^2 (m^2 + n^2 B_a^2) + E_1^2 a^2 (1-\nu^2)} \frac{E_1}{P} \quad (25)$$

Avec :

$$P = (E_m \alpha_m + (E_{cm} \alpha_m + E_m \alpha_{cm}) / (k+1) + E_{cm} \alpha_{cm} / (2k+1)) h$$

$$B_a = a / b$$

Il en résulte que la température critique à prendre en compte est la température la plus faible, correspondant au premier mode (n=m=1) :

$$\Delta T_{cr} = \frac{(E_1 E_3 - E_2^2)(1-\nu)\pi^2(1+B_a^2)}{2(1+\nu)(E_1 E_3 - E_2^2)\pi^2(1+B_a^2) + E_1^2 a^2(1-\nu^2)} \frac{E_1}{P} \quad (26)$$

Dans le cas ou on néglige cisaillement nous obtenons [10]et[11]:

$$\Delta T_{cr} = \frac{(E_1 E_3 - E_2^2)(1-\nu)\pi^2(1+B_a^2)}{E_1^2 a^2(1-\nu^2)} \frac{E_1}{P} \quad (27)$$

La variation thermique sur les plaques sous une température constante

Considérant qu'une plaque P-FGM est soumise à une température constante .développons maintenant la formule (26) et (27), Pour l'application on va considérer une plaque P-FGM constituée de céramique de alumina dont les caractéristique mécanique de céramique : $E_c = 380 \text{ GPa}$

Et de coefficient de dilatation thermique : $\alpha_c = 7.4 \times 10^{-6} (1/^\circ C)$

Et de métal d'aluminium de caractéristique mécanique : $E_m = 70 \text{ GPa}$

Et de coefficient de dilatation thermique : $\alpha_m = 23 \times 10^{-6} (1/^\circ C)$

Pour les matériaux on va considérer le même coefficient de Poisson $\nu = 0.3$

On va prendre trois cas pour la valeur k=0.2, 3et10

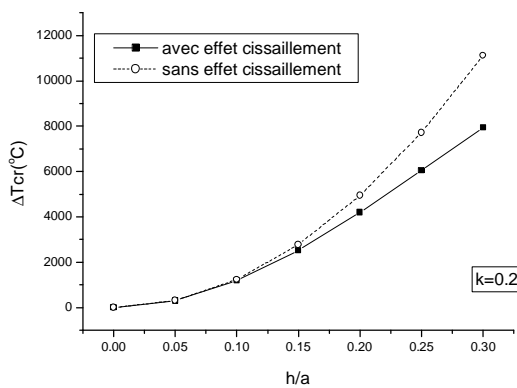


Figure 2: la variation de la température critique de flambement pour k=0.2

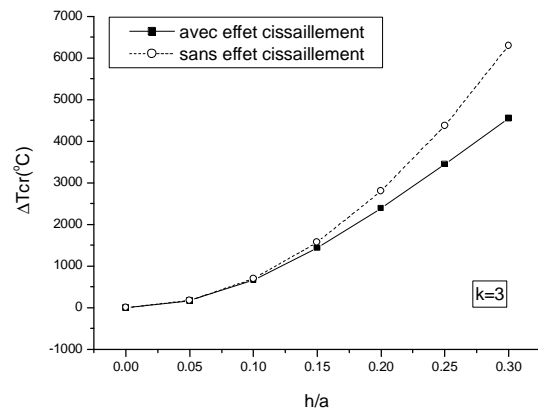


Figure 3: la variation de la température critique de flambement pour k=3

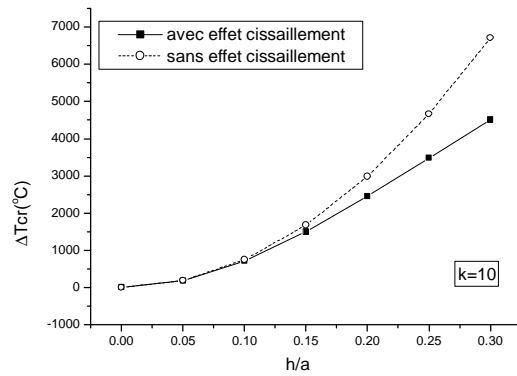


Figure 4: la variation de la température critique de flambement pour k=10

Pour les plaques homogènes on peut considérer le cas pour une plaque P-FGM k=0 pour cela

$$E(z) = E_c = E, E_1 = Eh, E_2 = 0 \text{ et } E_3 = \frac{1}{12}Eh^3$$

De même pour le coefficient de dilatation thermique $a(z) = a_c = a$

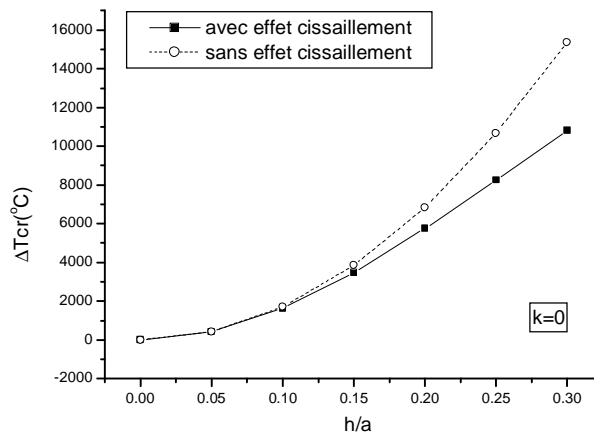


Figure 5 : la variation de la température critique de flambement pour k=0 (plaque homogène)

On peut remarquer que pour les différentes valeurs de k la variation de la température critique de flambement en fonction de l'élancement ($h/a < 0.1$) est pratiquement confondue avec et sans effet cisaillement.

On va tracer dans la figure (6) la variation de la température critique de flambement de la plaque homogène en fonction de la température critique de flambement d'une plaque P-FGM ($k=0.2, 3 \text{ et } 10$) sous l'effet de cisaillement.

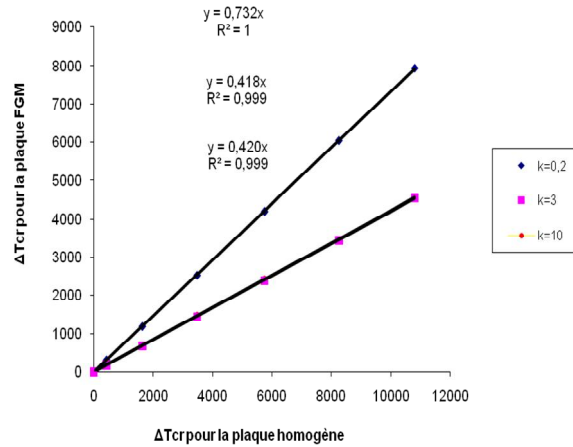


Figure 6 : la variation ΔT_{cr} plaque homogène en fonction d'une plaque P-FGM avec la prise en compte de l'effet de cisaillement

Les pentes de proportionnalité sont données pour les différents cas de k . dans le cas d'une plaque FGM avec la prise en compte de l'effet de cisaillement la pression de moins de 1%.

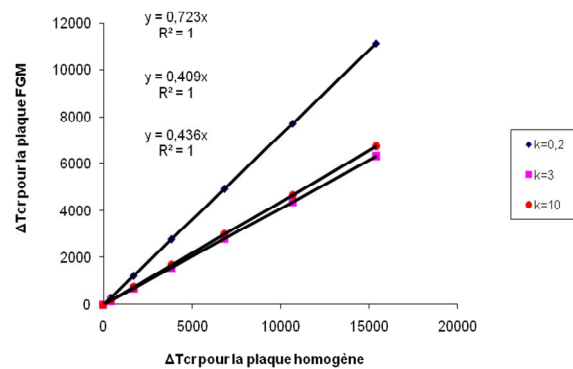


Figure 7 : la variation ΔT_{cr} plaque homogène en fonction d'une plaque P-FGM sans l'effet de cisaillement

Dans la figure(7) on a trace la variation de la température critique de flambement pour une plaque homogène en fonction d'une plaque P-FGM ($k=0.2, 3$ et 10) on néglige l'effet de cisaillement.

La variation thermique sur les plaques sous une variation de température uniforme

Considérant qu'une plaque P-FGM est soumise à une variation de température uniforme [3]:

$$T(z) = \frac{\Delta T}{h}(z + h/2) + T_m \quad (28)$$

Avec : $\Delta T = T_c - T_m$

$$\Phi = \frac{(E_1 E_3 - E_2^2)(1-\nu)\pi^2(1+B_a^2)E_1}{E_1^2 a^2 (1-\nu^2)} \quad (29)$$

En reportant l'expression (29) dans l'équation (13), nous obtenons l'équation :

$$\Phi = \int_{-h/2}^{h/2} E(z)\alpha(z) \left[\frac{\Delta T}{h}(z + h/2) + T_m \right] dz$$

Si on développe cette équation on trouve

$$\Phi = PT_m + X\Delta T \quad (30)$$

Avec :

$$X = \frac{E_m \alpha_m h}{2} + \frac{(E_m \alpha_{cm} + E_{cm} \alpha_m) h}{k+2} + \frac{E_{cm} \alpha_{cm} h}{2k+2}$$

L'équation (30) donne la température critique de flambement :

$$\Delta T_{cr} = \frac{\Phi - PT_m}{X} \quad (31)$$

La valeur Φ peut prendre plusieurs valeurs suivant la considération faite dans le cas de la prise en compte de contrainte de cisaillement :

$$\Phi = \frac{(E_1 E_3 - E_2^2)(1-\nu)\pi^2(1+B_a^2)E_1}{2(1+\nu)(E_1 E_3 - E_2^2)\pi^2(1+B_a^2) + E_1^2 a^2(1-\nu^2)} \quad (32)$$

Et dans le cas où néglige la contrainte de cisaillement :

$$\Phi = \frac{(E_1 E_3 - E_2^2)(1-\nu)\pi^2(1+B_a^2)E_1}{E_1^2 a^2(1-\nu^2)} \quad (33)$$

Avec les mêmes considérations faites sur la plaque P-FGM (métal-céramique) on va prendre des trois cas pour la valeur $k=0.5, 3$ et 20 .

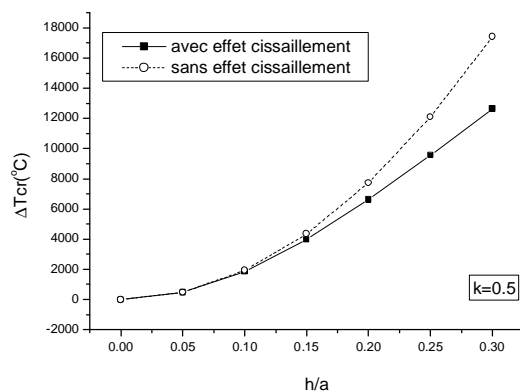


Figure 8 : la variation de la température critique de flambement pour $k=0.5$

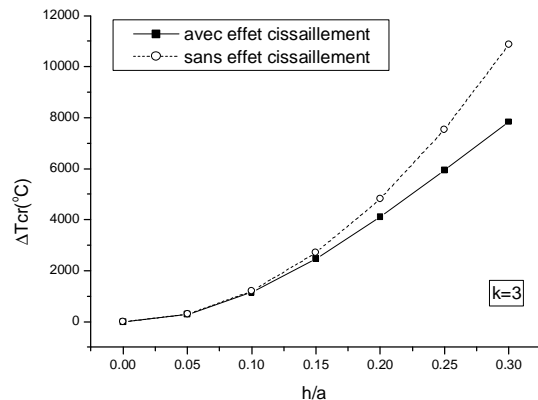


Figure 9 : la variation de la température critique de flambement pour $k=3$

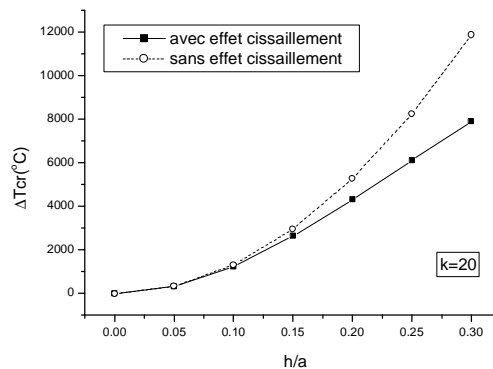


Figure 10 : la variation de la température critique de flambement pour $k=20$

Pour les plaques homogènes on peut considérer le cas particulier $k=0$ pour cela on prend la même forme de la température critique de la formule (28) mais la valeur de Φ prend une autre forme ; dans le cas de la prise en compte de la contrainte de cisaillement pour une plaque homogène.

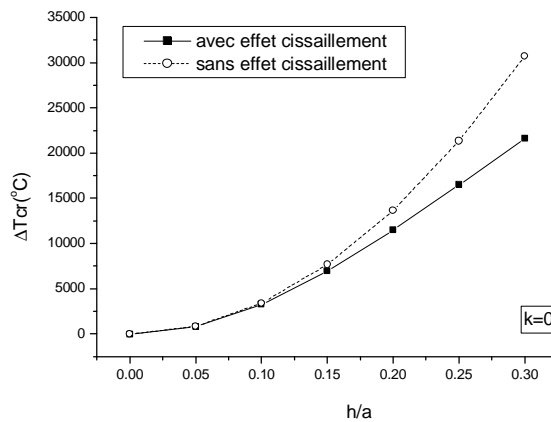


Figure 11 : la variation de la température critique de flambement pour plaque homogène

La présentation de la variation de la température critique de flambement de la plaque homogène en fonction de la variation de la température critique de flambement de la plaque P-FGM avec la prise en compte de la contrainte de cisaillement nous donne

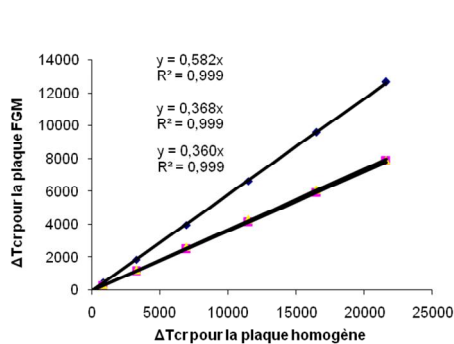


Figure 12 : la variation ΔT_{cr} plaque homogène en fonction d'une plaque P-FGM avec la prise en compte de l'effet de cisaillement

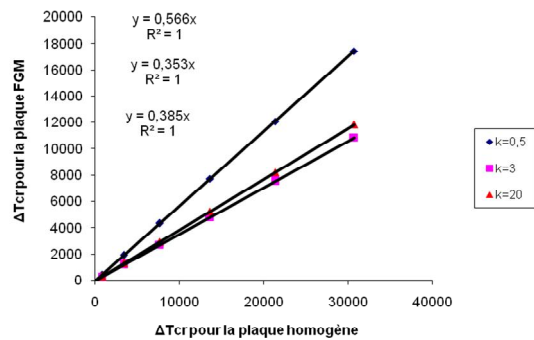


Figure 13 : la variation ΔT_{cr} plaque homogène en fonction d'une plaque P-FGM sans l'effet de cisaillement

Avec les différents cas considérés (la prise en compte de la contrainte de cisaillement ou le non) et avec les différentes valeurs de k ; il existe la proportionnalité entre la variation de la température critique de flambement de la plaque homogène en fonction de la variation de la température critique de flambement de la plaque P-FGM.

Conclusion

Dans le cadre de ce travail, nous avons trouvé une proportionnalité des plaques FGM et les plaques homogènes. La théorie classique de stratification est utilisée dans ce travail pour montrer ce la.

La rareté des solutions exactes pour les problèmes des plaques FGM chargées transversalement et sous chargement thermique. Nous a conduits à évaluer la proportionnalité par rapport aux modèles existants basés sur des approximations du champ de déplacement. Successivement ont été testés les modèles (Kirchoff_Love et Reissner_Mindlin), La comparaison de ces résultats a permis de dégager un point

très important ; En générale le modèle basé sur les plaques homogènes est plus performant et beaucoup plus simple que pour des plaques FGM, de ce fait le modèle étudié est plus riche que les autres modèles et permet de traiter à la fois les structures minces et épaisses.

Par conséquent, on peut analyser le problème géométriquement non linéaire on utilise des outils disponibles pour les plaques homogènes,

Puis, si la plaque FGM se comporte comme le plaque homogènes Cela signifie que l'on peut utiliser les résultats et les logiciels développés pour les plaques homogènes. Ces résultats sont particulièrement avantageux pour les plaques FGM. Les exemples ont montré que les plaques FGM se comportent comme les plaques homogènes.

Références

- [1] Bao, G., Wang, L., 1995. Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings. *International Journal of Solids and Structure* 32, 2853–2871.
- [2] B. KIEBACK, A. NEUBRAND, H. Riedel «Processing techniques for functionally graded materials», *Materials Science and Engineering A362* (2003) 81–105
- [3] Lanhe Wu, Zhiqing Jiang, Jun Liu. Thermoelastic stability of functionally graded cylindrical shells (2005)70, 60-68
- [4] MOYA, J. S., SANCHEZ-HERENCIA, A. J., REQUENA, J. & MORENO, R, Functionally Gradient Ceramics by Sequential Slip Casting, *Materials Letters*, 1992, Vol. 14, p.333-35.
- [5] E Reissner. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *J. Appl. Mech.*, vol. 12, pages 69-77, 1945.
- [6] P.C. Yang, C.H. Norris & Y. Stavsky. Elastic wave propagation in heterogeneous plate. *Int. J. Sol. Struct.*, vol. 2, pages 665(684, 1966).
- [7] ABDIZADEH, H., *Elaboration Et Caractérisation De Composites Duplex «Composites Laminaires Tri-Couches A Base D'Alumine»*, Thèse Docteur d'Etat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon et l'Université Claude Bernard Lyon I-France, 1997, 212p.
- [8] YUKI, M., MURAYAMA, T. & IRISAWA, T., Temperature Gradient Sintering of PSZ/Mo Functionally Gradient Material by Laser Beam Heating, in *Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan*, 1991, p. 203
- [9] Koizumi M. The concept of FGM. *ceramic transaction, functionally graded materials*(1992)34,3-10.
- [10] Thornton EA. Thermal buckling of plates and shells[J]. *Appl Mech Rev* 993;46(10):485–506.
- [11] Tauchert TR. Thermal buckling of thick antisymmetric angle plylaminates[J]. *J Thermal Stresses* 1987;10(1):113–24.
- [12] G. Kirchhoff. *Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe*. *Journal für reine und angewandte Mathematik*, vol. 40, pages 51-88, 1850.