Monsieur **Riabi Mohammed**
Dr ING. En hydraulique-Université de Chlef Algérie.
Monsieur **B. Achour**
Professeur, Laboratoire de recherche en hydraulique souterraine et de surface (LARHYSS)
Université de Biskra
E-mail : mohammedriabi@hotmail.com
Code communication : **0710**

Dimensionnement des conduites de forme ovoïdale partiellement remplies

Résumé :
La présente étude a pour objectif le dimensionnement des conduites de forme ovoïdale partiellement remplies. Sur la base du modèle rugueux de référence le diamètre circonscrit caractéristique peut s'écrire $D=\psi\overline{D}$; $\overline{D}$ représente le diamètre circonscrit du modèle rugueux de référence et ψ est un coefficient de correction sans dimension linéaire. Cette approche est applicable dans le domaine entier de l'écoulement turbulent et mène à des solutions explicites et pratiques de conception de telles conduites. Le calcul de la dimension linéaire, même celui de la profondeur normale, devient aisé dans une large gamme pratique du taux de remplissage compris entre 0,2 et 0,8.

Abstract:
The present study aims to contribute in the design of the egg-shaped conduct partially filled. On the basis of the referential rough model, the vertical diameter of the conduct can be written $D=\psi\overline{D}$, where $\overline{D}$ is the vertical diameter of the referential rough model and ψ is a non-dimensional correction factor. This approach is applicable in the entire turbulent flow domain and leads in practice to explicit relationships for the design of such conducts. The computation of the linear dimension and also the normal depth is easy in the wide range of the flow depth ratio from 0.2 to 0.8.

1 INTRODUCTION

L'écoulement est considéré comme étant uniforme lorsque ses caractéristiques sont invariables dans le temps et dans l'espace. Les éléments à considérer dans l'écoulement permanent sont le débit volume ***Q***, la pente ***J***, la rugosité absolue ε, une dimension linéaire ***a*** quelconque (*Achour* et al, 2002), le taux de remplissage η de la conduite et la viscosité cinématique du liquide ν en écoulement. Ces paramètres sont liés par la relation fonctionnelle :

$$\varphi(a,Q,J,\varepsilon,\eta,\nu)=0\,.$$

Trois catégories de problèmes peuvent se présenter dans la pratique de l'ingénieur hydraulicien. La première catégorie répond à un besoin de dimensionnement et consiste à évaluer la dimension linéaire *a* à partir des valeurs connues des cinq autres paramètres régissant l'écoulement (*Achour et al*, 2002). En se référant à la bibliographie, il n'existe à l'heure actuelle aucune relation explicite susceptible de répondre à cette catégorie de problème lorsque l'écoulement est de nature lisse ou de transition. Ceci s'explique par l'impossibilité d'évaluer le nombre de Reynolds ***R*** puisque celui-ci dépend de la dimension linéaire ***a*** recherchée. Le problème peut être résolu en s'appuyant sur un procédé itératif. Dans le domaine rugueux, pour lequel ***a*** est indépendant de *R*, l'application de relations de type *Manning-Strickler* donne des résultats satisfaisants. La deuxième catégorie de problème consiste à évaluer le débit *Q*. Ce problème est solutionné de manière explicite par la combinaison des relations de *Colebrook-White* et de *Darcy-Weisbach*, et ce quelle que soit la nature du régime d'écoulement. La troisième catégorie de problème est celle qui consiste à évaluer le gradient de la perte de charge *J*, pour ce cas, l'application des relations de type *Darcy-Weisbach* est suffisante (*Swamee et Jain*, 1976, 1977,1978). Seul le problème du dimensionnement sera considéré dans la présente étude. Elle sera basée sur le modèle rugueux de référence. Ce modèle est une conduite caractérisée par une rugosité relative $\varepsilon/D=0{,}037$ arbitrairement choisie.

L'écoulement est supposé être turbulent rugueux de telle sorte que le coefficient de frottement soit égal à $f=1/16$ en vertu de l'équation de *Colebrook-white* pour un nombre de *Reynolds* $R=\overline{R}\rightarrow\infty$.

Les études existantes se rapportant au dimensionnement de telles conduites ne sont pas nombreuses. Elles proposent soit une résolution graphique ou soit des solutions itératives basées toutes sur un coefficient de résistance à l'écoulement constant. D'autres donnent, avec des relations approchées explicites, des solutions pour les grosses conduites remplies à 75% (*Swame*e et *Swame*e, 2008). Il n'existe pas actuellement une approche théorique donnant des solutions intégrant toute valeur du taux de remplissage η entre 0 et 1.

1. CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES DE LA CONDUITE.

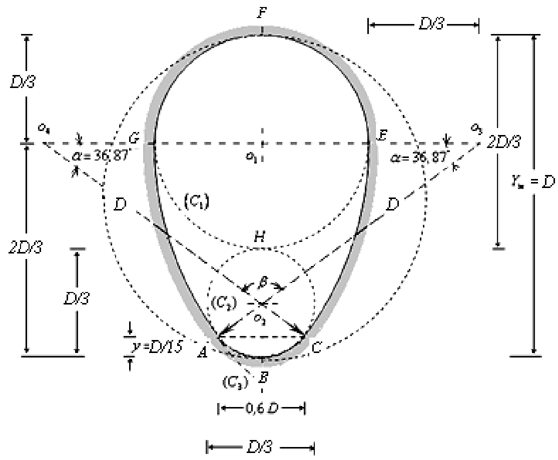

Figure 1. Schéma de définition de la conduite ovoïde normale (*Lancastre, 1996*).

La conduite est caractérisée par la dimension représentant sa hauteur Y_m égale au diamètre *D* du cercle circonscrit. Elle est formée dans sa partie haute par un demi-cercle (C_1) de diamètre $2D/3$ et dans sa partie basse par un arc de cercle (C_2) de diamètre $D/3$, les deux parties sont reliées symétriquement par deux arcs de diamètre D désignées par (C_3). On démontre aisément :

- $\alpha = 36{,}87^\circ$ - $\beta = 106{,}26^\circ$ - $y = D/15$ - $\overline{AC} = 4/15\,D$

2. CARACTERISTIQUES DE L'ECOULEMENT

Les caractéristiques de l'écoulement, telle que l'aire de la section mouillée *A*, le périmètre mouillé *P*, le rayon hydraulique R_h ou la largeur du plan d'eau *e* dépendent du taux de remplissage $\eta = y_n/D$ ou y_n est la profondeur normale de l'écoulement et *D* est la hauteur de la conduite. Ces caractéristiques s'expriment par différentes relations selon le lieu géométrique de l'écoulement.

Nous avons trois lieux géométriques différents que peut occuper l'écoulement, selon la valeur du taux de remplissage :

- Entre le point *B* et la corde $\overline{AC}$ de la partie circulaire basse c'est-à-dire $\eta \le 1/15$
- Entre les cordes $\overline{AC}$ et $\overline{GE}$ de l'espace délimité par les arcs de cercle GA et CE, c'est-à-dire $1/15 \le \eta \le 2/3$
- Entre la corde $\overline{GE}$ et le point *F* de la partie circulaire la plus haute de la conduite c'est-à-dire $2/3 \le \eta \le 1$.

Les éléments géométriques, telle que la surface mouillée *A*, le périmètre mouillée *P*, et le rayon hydraulique R_h dépendent de la dimension linéaire *a* (*D* dans notre cas) recherchée et l'on peut écrire que quelle que soit la forme du profil géométrique on a :

$$A = A_1 a^2 = A_1 D^2 \tag{1}$$

$$P = P_1 a = P_1 D \tag{2}$$

$$R_h = \frac{A_1}{P_1} a = \frac{A_1}{P_1} D = D R_{h1} \tag{3}$$

A_1, P_1 et R_{h1} sont des paramètres adimensionnels et correspondent respectivement à l'aire de la section mouillée, le périmètre mouillé et le rayon hydraulique lorsque la dimension linéaire *D* est égal à l'unité. Nos calculs ont montré que tous ces paramètres ne dépendent, dans toute l'étude que nous allons considérées, que du taux de remplissage $\eta = y_n/Y_m$ qui représente le rapport de la hauteur normale y_n de l'écoulement sur la hauteur de la conduite Y_m.

Selon la valeur de ce taux, nous avons exprimé les différentes paramètres adimensionnels A_1, P_1, et R_{h1} en fonction de ce taux de remplissage, ces paramètres figurent dans le tableau ci-contre.

3. DIMENSIONNEMENT DE LA CONDUITE.

Le diamètre *D* peut être évalué par la relation fondamentale de la MMR, applicable à toute forme de profil géométrique de conduites et canaux *(Achour et Bedjaoui, 2006) :*

$$D = \psi \overline{D} \tag{4}$$

Ou : $\overline{D}$ représente le diamètre du modèle rugueux de référence et ψ un coefficient de correction sans dimension

Tableau des Paramètres adimensionnels.

Expressions des fonctions de η

$\eta \le 1/15$ $\quad \sigma(\eta) = \cos^{-1}(1-6\eta)$;

$$\varphi(\eta) = 1 - \frac{2(1-6\eta)\sqrt{3\eta(1-3\eta)}}{\cos^{-1}(1-6\eta)} \;;$$

$1/15 \le \eta \le 2/3$ $\quad \vartheta(\eta) = 1{,}59610063 - 2\sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - \eta\right)$

$$\zeta(\eta) = 1{,}22481487 - \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - \eta\right) + \left(\eta - \frac{2}{3}\right)\sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - \eta\right)^2} - \frac{4}{3}\eta$$

$2/3 \le \eta \le 1$ $\quad \tau(\eta) = 2{,}64329818 - \frac{2}{3}\cos^{-1}\left[3\left(\eta - \frac{2}{3}\right)\right]$;

$\lambda(\eta)$

Par.	$\eta \le 1/15$	$1/15 \le \eta \le 2/3$	$2/3 \le \eta \le 1$
A_1	$A_1 = \sigma(\eta)\varphi(\eta)/36$	$A_1 = \zeta(\eta)$	$A_1 = \lambda(\eta)$
P_1	$P_1 = \sigma(\eta)/3$	$P_1 = \vartheta(\eta)$	$P_1 = \tau(\eta)$
R_{h1}	$R_{h1} = \varphi(\eta)/12$	$R_{h1} = \zeta(\eta)/\vartheta(\eta)$	$R_{h1} = \lambda(\eta)/\tau(\eta)$

A l'état plein on a :

$A_{1p} = 0{,}5104589$; $P_{1p} = 2{,}64329818$; $R_{h1p} = 0{,}19311438$

3-1 Détermination du diamètre $\overline{D}$ par la MMR :

La relation de *Darcy –Weisbach* régissant l'écoulement à surface libre dans une conduite est :

$$J = f\,V^2/2gD_h \tag{5}$$

La vitesse *V* et le diamètre hydraulique D_h s'écrivent par les relations respectives $V = Q/A$ et $D_h = 4A/P$.

La relation (5) devient alors :

$$J = f\,\frac{PQ^2}{8gA^3} \tag{6}$$

En exprimant dans cette dernière la surface *A* et le périmètre *P*, en fonction de la dimension linéaire *D* par leurs relations respectives (1) et (2) on a :

$$J = f\,\frac{Q^2}{8gD^5}\left(\frac{P_1}{A_1^3}\right) \tag{7}$$

Dans le modèle rugueux de référence considéré, c'est-à-dire lorsque *D* est une inconnue du problème, assumons les égalités $J = \overline{J}$ et $Q = \overline{Q}$ par contre $D \ne \overline{D}$ $A \ne \overline{A}$, et $P \ne \overline{P}$. (C'est à dire, nous faisons écouler dans ce modèle rugueux de référence le même débit que celui de la conduite, sous le même gradient de perte de charge linéaire. Selon la MMR, l'écoulement dans ce modèle est caractérisé par un coefficient de frottement $\overline{f} = 1/16$ *(Achour, 2007)*. La relation (7) prend alors la forme suivante :

$$J = \frac{Q^2}{128g\overline{D}^5}\left(\frac{P_1}{A_1^3}\right) \tag{8}$$

En comparant (7) et (8) nous pouvons déduire que $D \ne \overline{D}$. Ainsi, pour écouler le débit *Q* sous le gradient de perte de charge *J*, le modèle rugueux de référence doit être caractérisé par une dimension linéaire $\overline{D}$ différente de celle de la conduite. On tire de la relation (8) l'expression de la dimension linéaire dans le régime turbulent rugueux :

$$\overline{D} = 0,379\left(\frac{Q^2}{gJ}\right)^{1/5}\left(\frac{P_1}{A_1^3}\right)^{1/5} \qquad (9)$$

3-2 Détermination du coefficient ψ et expression du diamètre *D* :

Le paramètre ψ sans dimension compris entre les valeurs 0 et 1 (tel que $0 \le \psi \le 1$) est défini par la relation *(Achour et Bedjaoui, 2006) :*

$$\psi = 1,35\left[-\log\left(\frac{\varepsilon}{19\overline{R_h}} + \frac{8,5}{\overline{R}}\right)\right]^{-2/5} \qquad (10)$$

Où $\overline{R_h}$, le rayon hydraulique du MMR, exprimé par (3) :

$$\overline{R_h} = \frac{\overline{A}}{\overline{P}} = \frac{A_1}{P_1}\overline{D} \qquad (11)$$

Le nombre de *Reynolds* $\overline{R}$ est calculé par :

$$\overline{R} = \frac{4Q}{P\nu} = \frac{4Q}{P_1\overline{D}\nu} \qquad (12)$$

En remplaçant dans cette dernière $\overline{D}$ par la relation (9) et après calcul on a :

$$\overline{R} = 10,556\frac{\left(gJQ^3\right)^{1/5}}{\nu}\left(\frac{A_1}{P_1^2}\right)^{3/5} \qquad (13)$$

La dimension linéaire *D* est alors selon la relation (4) :

$$D = 0,512\left[-\log\left(\frac{\varepsilon}{19\overline{R_h}} + \frac{8,5}{\overline{R}}\right)\right]^{-2/5}\left(\frac{Q^2}{gJ}\right)^{1/5}\left(\frac{P_1}{A_1^3}\right)^{1/5} \qquad (14)$$

Ainsi, avec les valeurs connues des paramètres *Q*, η et *J*, les étapes de calcul de *D* sont alors les suivantes :

- A partir de la valeur connue du taux η de la conduite, on détermine les par.dim. A_1 et P_1 selon le tableau.
- Les valeurs ainsi déterminées, *Q* et *J* sont introduites dans (9), (11) et (13) pour le calcul de $\overline{D}$, $\overline{R_h}$ et $\overline{R}$.
- Ainsi, tous les paramètres de la relation (13) sont connus pour l'évaluation du diamètre recherché *D*.

Le coefficient ψ peut être déterminé par la relation (10).

Exemple d'application :

Calculer la valeur du diamètre D de la conduite si le débit Q=1,337m³/ s, ν=10⁻⁶m²/s, J=5.10⁻⁴. La rugosité ε=0,0005m et le taux de remplissage est η=0,65.

Solution

Puisque $1/15 \le \eta \le 2/3$, *les par.dim :* A_1 *et* P_1 *sont :*

$(\eta = 0,65) \quad P_1 = 1,56276575 \quad A_1 = 0,32481641$

Selon la relation (9) le diamètre $\overline{D}$ *est :*

$$\overline{D} = 0,379\left(\frac{1,337^2}{9,81\times 0,0005}\right)^{1/5}\left(\frac{1,56276575}{0,32481641^3}\right)^{1/5} = 2,64703675\,m$$

Selon la relation (9) le rayon hydraulique est :

$$\overline{R_h} = \frac{A_1}{P_1}\overline{D} = \frac{0,32481641}{1,56276575}\times 2,64703675 = 0,55017905\,m$$

Le nombre de Reynolds du MMR selon la relation (36)

$$\overline{R} = 10,556\times\frac{\left(9,81\times 5.10^{-4}\times 1,337^3\right)^{1/5}}{10^{-6}}\times\left(\frac{0,32481641}{1,56276575^2}\right)^{3/5} = 1293052$$

Selon la relation (37), le diamètre $\overline{D}$ *est :*

$$D = 0,512\left[-\log\left(\frac{\varepsilon}{19\overline{R_h}} + \frac{8,5}{\overline{R}}\right)\right]^{-2/5}\left(\frac{Q^2}{gJ}\right)^{1/5}\left(\frac{P_1}{A_1^3}\right)^{1/5} = 2,00193098\,m \cong 2\,m$$

Soit un diamètre D=2 m.

Vérifions nos calculs en déterminant le débit volume Q par application de la formule générale d'Achour et Bedjaoui (2006) :

$$Q = -4\sqrt{2g}\,A\sqrt{R_h J}\,\log\left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{\overline{R}}\right)\ Ou\ \overline{R} = \frac{32\sqrt{2}\sqrt{gJR_h^3}}{\nu}$$

Pour cela, évaluons d'abord A, R_h *et* $\overline{R}$ *, pour D calculé :*

L'aire de la section mouillée A est donnée par (1), soit :

$$A = A_1D^2 = 0,32481641\times 2,00193098^2 = 1,30177571\,m^2$$

Le rayon hydraulique est donné par la relation (3) :

$$R_h = D\frac{A_1}{P_1} = 2,00193098\times\frac{0,32481641}{1,56276575} = 0,41609565\ m$$

Le nombre de Reynolds R est :

$$\overline{R} = \frac{32\sqrt{2}\sqrt{gJR_h^3}}{\nu} = \frac{32\times\sqrt{2}\times\sqrt{9,81\times 0,0005\times 0,41609565^3}}{10^{-6}} = 850696$$

Ainsi, selon la relation générale, le débit Q est égal à :

$$Q = 4\times\sqrt{2\times 9,81}\times 1,30177571$$

$$\times\sqrt{0,41609565\times 0,0005}\times\log\left(\frac{0,0005}{14,8\times 0,41609565} + \frac{10,04}{850696}\right)$$

$$= 1,34121542\ m^3/s \cong 1,341\,m^3/s$$

L'écart relatif Q calculé et celui donné à l'énoncé est inférieur à 0,32% seulement.

Notations : ***Q*** (débit) ; ***J*** (gradient de perte de charge) ; ε (rugosité absolue) ; ***R*** (nombre de Reynolds); η *(*taux de remplissage); $\overline{Q}$ (Débit dans le MMR) ; $\overline{J}$ (Gradient de perte de charge dans le MMR) ; $\overline{R}$ **(**Nombre de Reynolds dans le MMR**).**

Bibliographie :

ACHOUR, B., BEDJAOUI, A., KHATTAOUI, M., DABABECHE, M. (2002). *Contribution au calcul des écoulements uniformes à surface libre et en charge. Larhyss/Journal n°1, 7-36.*

ACHOUR, B., BEDJAOUI, A. (2006, to be published). "Discussion of : Exact Solutions for Normal Depth Problem" by Prabatha, K. Swamee and Pushpa N. Rathie. *J.Hydraulic.Res., IAHR*

ACHOUR, B., BEDJAOUI, A., (2006). *Contribution au calcul de la profondeur normale dans un canal rectangulaire. Larhyss/Journal n°5, 139-147*

ACHOUR, B., BEDJAOUI, A., (2006). *Calcul du coefficient de frottement en conduite circulaire sous pression. Larhyss/Journal n°5, 197-200*

CARLIER, M. (1986). *Hydraulique générale et appliquée*, Ed. Eyrolles, Paris.

LENCASTRE, A. (1996). *Hydraulique générale, Ed. Eyrolles, Paris.*